

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Введение в стохастический анализ |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Анализ данных в экономике Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 3 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.И. Богачев, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 22.05.2023

Аннотация

В данном курсе рассматриваются основные свойства винеровского процесса, Гауссовские меры в бесконечномерных пространствах, пространство Камерона-Мартин гауссовской меры. А также различные виды стохастических интегралов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование у студентов стохастической (вероятностной) интуиции при решении вероятностными методами задач из различных областей математики.

Задачи дисциплины

- приобретение умений и навыков для решения задач вероятностными методами;
- освоение студентами важных современных приложений стохастических дисциплин.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи |
| | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки |
| | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки |
| | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
| | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов |
| | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки |
| | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |

| | |
|---|--|
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- современные проблемы стохастических дисциплин;
- аналитические и численные подходы и методы для решения прикладных задач стохастическими методами.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач математики;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- строго доказывать или опровергать утверждения.

владеть:

- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических задач, требующих для своего решения вероятностные методы.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|---|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Основные свойства винеровского процесса | 5 | 5 | | 20 |
| 2 | Пространство Камерона-Мартина гауссовской меры | 5 | 5 | | 20 |
| 3 | Важные неравенства, связанные с гауссовскими мерами. | 5 | 5 | | 10 |
| 4 | Стохастические дифференциалы и формула Ито. | 5 | 5 | | 10 |

| | | | | | |
|-----------------------|---|---------------------|----|--|----|
| 5 | Теорема Гирсанова. | 5 | 5 | | 10 |
| 6 | Операторные полугруппы и диффузионные полугруппы. | 5 | 5 | | 5 |
| Итого часов | | 30 | 30 | | 75 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Основные свойства винеровского процесса

Гауссовские меры в бесконечномерных пространствах: основные понятия и факты.

2. Пространство Камерона-Мартина гауссовской меры

Эквивалентность и сингулярность гауссовских мер.

3. Важные неравенства, связанные с гауссовскими мерами.

Стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу.

4. Стохастические дифференциалы и формула Ито.

Стохастические дифференциальные уравнения: сильные и слабые решения.

5. Теорема Гирсанова.

Диффузионные процессы.

6. Операторные полугруппы и диффузионные полугруппы.

Стохастический интеграл по случайной мере.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.
2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков [Текст] : учеб. пособие для вузов / под ред. А. В. Гасникова ; предисл. М. С. Ликсутова .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО, 2013 .— 427 с.
3. Модели Интернета [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 64 с.
4. Модели случайных графов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 136 с.

Дополнительная литература

1. Разработка математических моделей и методик стохастического моделирования для вероятностного анализа безопасности и надежности объектов энергетики [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Волков, Р. Т. Исламов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т), Фак. инноваций и высоких технологий .— М. : МФТИ, 2014 .— 67 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

www.mou.mipt.ru
www.mathnet.ru

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс , должен развить математическую интуицию для решения сложных, нестандартных задач вероятностными методами.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные методы доказательств теоретических задач и владеть основными приемами для решения прикладных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательства отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам в качестве домашнего задания.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении в изучении отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю, ведущему занятия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Анализ данных в экономике
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: В.И. Богачев, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи |
| | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки |
| | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки |
| | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
| | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов |
| | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки |
| | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в стохастический анализ» обучающийся должен:

знать:

- современные проблемы стохастических дисциплин;
- аналитические и численные подходы и методы для решения прикладных задач стохастическими методами.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач математики;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- строго доказывать или опровергать утверждения.

владеть:

- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических задач, требующих для своего решения вероятностные методы.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Вероятностные методы в комбинаторике.
2. Локальная лемма Ловаса.
3. Неравенство Талаграна.
4. Парадигма Пуассона.
5. Аппарат производящих функций
6. Подход Дж. Рота.
7. Теорема Пойа.
8. Формальные грамматики и теорема Лагранжа.
9. Вероятностный анализ алгоритмов, рандомизированные алгоритмы и их анализ
10. Сложность в среднем, сложность для почти всех входов.
11. Проверка тождеств с помощью метода Монте-Карло.
12. Теория информации
13. Понятие кода.
14. Каналы с шумом.
15. Теоремы Шеннона.
16. Примеры кодов.
17. Геометрические вероятности.
18. Формула Крофтона.
19. Теорема Дворецкого.
20. Предельные теоремы теории вероятностей и законы больших чисел.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Центральная предельная теорема, теорема Пуассона.
2. Неравенства больших отклонений.
3. Закон больших чисел, усиленный закон больших чисел.
4. Марковские модели макросистем
5. Эргодическая теория марковских процессов.
6. Концепции равновесия макросистем.
7. Методы Монте-Карло

8. Markov chain Monte Carlo revolution.
9. Стохастическая оптимизация
10. Субоптимальные вероятностные приближенные алгоритмы выпуклой оптимизации.
11. Основы современной математической статистики.
12. Метод наибольшего правдоподобия (теорема Фишера), критическая размерность, феномен Вилкса, семипараметрическое оценивание, линейные модели.
13. Стохастические модели транспортных потоков.
14. Простейшие системы массового обслуживания. Формула Литтла.
15. Сети (Джексона) массового обслуживания. Теорема Гордона-Ньюэлла.
16. Надежность транспортных сетей.
17. Процессы с запретами.
18. Эргодические свойства транспортного потока.
19. Теорема М.Л. Бланка.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.